# Inference for population proportion p.

想推测全校学生中，男生的占比.

猜一个 p 的大致范围

对 p 的某 claim 进行判定

p 大致在 (0.45, 0.48)

p > 0.5 是不对的

Confidence Interval

Hypothesis Testing.

做推断就是算"概率"

# Hypothesis Testing for P.

*要做 Hypothesis testing，先满足条件。

Settings：eg. 别人对全校学生男性占比提出个一个想法 or claim，$P > 0.5$

你想检验这个想法是否有证据支撑。

所以，你去抽了一个 SRS 的样本.

$n=50$

构建了 Hypothesis.

原假设 null hypo. $H_0$ : $p=0.5$ ← 等于.

alternative hypothesis. $H_A$ : $p>0.5$ ← $<$ , $>$ or $\neq$.

null hypothesis ← 假定已成立，

看看能不能推翻

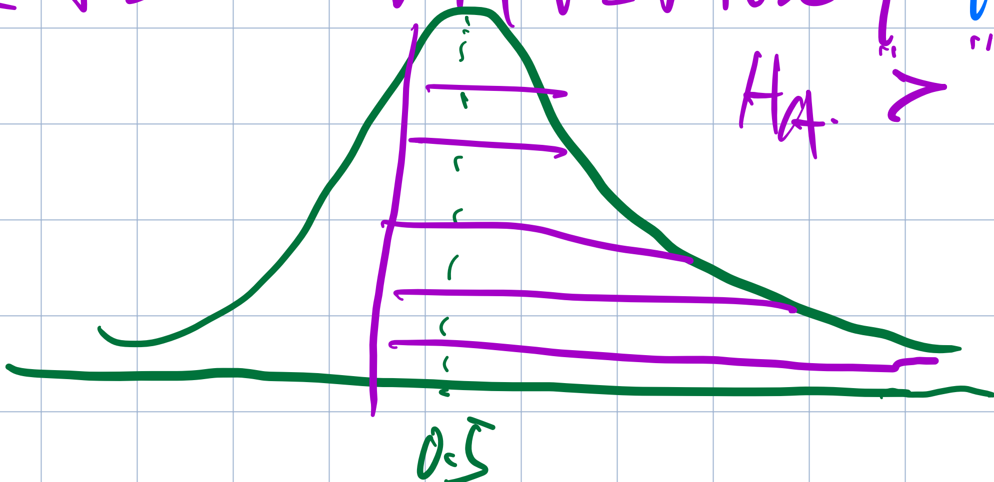
$p=0.5$ 已成立.

$$\Rightarrow \hat{p} \sim N\left(0.5, \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{50}}\right)$$

senario ①

我们取到的样本是 $\hat{p}=0.48$

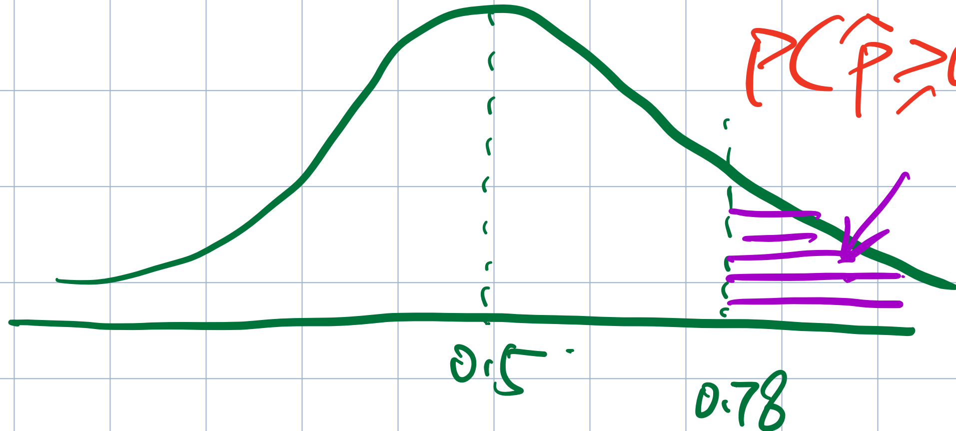
算取到此样本以及比取到此样本更符合 Ha 的样本的概率 P-value




P > 0.5 ⇒ 取到此样本是个大概率事件. 没什么好奇怪的

无法推翻 Ho ⇐

Senario ② 抽到样本 $\hat{p}=0.78$




$P(\hat{p}\geq 0.78)=0.023$

推翻了 $H_0$

支持 $H_A$.

抽到一个小概率样本 $\Rightarrow$ 见鬼了

日常情况见不到鬼. 有猫腻.

原假设不符合情况！所以导致见鬼！

① 定 Hypothesis.

$H_0$ $p = ?$

$H_a$ $p <$ or $>$ or $\neq$ ?

② 验 3 conditions.

1) SRS.

2) 10%

3) Large count.

$\hat{p} \sim N$:

③ 算 p-value.

④ 做判断

p-value > 0.05 $H_0$ 成立.

p-value < 0.05 $H_a$ 成立.

State ① 解决什么问题. 做 H.T.

② 用什么变量. P is ......

Plan. ① 想用什么方法.

② 用此方法是否符合条件

Do ① 记算关键指标.

Conclude: ① 做出结论.

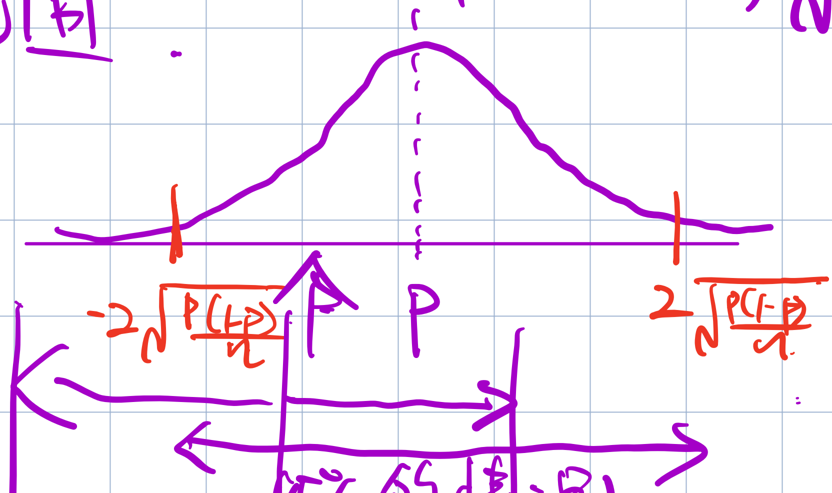
Hypothesis test. 有claim 验证对不对.

Confidence Interval 求 pop. parameter.
一个大致范围.

全体参数.
全体均值 $\mu_x$
全体的比 P.

$\hat{p} = \frac{9}{20} = 0.45$ $n=20$ 问比较自信 $p$ 在什么范围

$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$




95% 的情况

$\hat{p}$ 在这个范围

95% 的情况下

陆这个范围

$\longleftarrow \quad \hat{p} \quad \longrightarrow$

$-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ $\qquad\qquad$ $+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

95%的情况 $\left(\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

包含 P.  $(0.227,\ 0.672)$

$\underline{1.344} \Rightarrow \frac{0.344}{1.344}$

$p = 70\% = 0.7$

控制半径

$$2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < 0.03$$

$$\frac{2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{0.03} < \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} > \frac{2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{0.03}$$

$$n > \frac{2}{0.03^2}\boxed{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$\hat{p} = 0.5$ 时，$\hat{p}(1-\hat{p})$ 达最高值

$$n > \frac{2}{0.03^2} \times 0.5 \times 0.5$$

$$n > 555.55$$

confidence interval → 区间. C.I.

区间中心、sample statistics.

区间半径. Margin of Error MOE

Margin of Error = Critical Value C.V.

× Standard Error S.E.

置信度

Confidence Level. 95%

Confidence level 不是概率.

C.L = 95% ⇒ CV = 1.96

Standard Error $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Sample值.

$n=60$ $\hat{p}=0.52$. $p=0.8$? $p>0.8$?

1) 定假设.

2) 验条件.

3) 算 p-value

4) 做结论.

D定假设.

Ta说：$p>0.8$ or $p=0.8$.

你觉得：$p<0.8$

变成 ⇓ $H_A$.

$H_A: p<0.8$

⇓ 将 $>$ or $<$ or $\neq$ 改成 "$=$"

用作 $H_0$

$H_0: p=0.8$

$H_0$ is called Null hypothesis. 原假设.

假定已经成立. 就把 $p=0.8$ 作为 pop. proportion.

⇒ 可构建 sampling distribution

$$\hat{p} \sim N\left(0.8, \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{60}}\right)$$

⇒ 查一查取到这样($\hat{p}=0.52$)一个样本.

或比此样本更符合 $H_A$ 方向样本 ($\hat{p}<0.52$)

的概率 → p-value.

如果 p-value 很大（p-value > 0.05）

⇒ 很轻松取到这样样本，没什么大不了

⇒ 常情况，无法推翻 $H_0$

如果 p-value 很小（p-value < 0.05）

⇒ 取到这样样本非常不可能

⇒ 你取到了这样的样本，见鬼了。

⇒ 不该见鬼有东西出问题了。

⇒ 原假设出问题了。

⇒ 推翻原假设 $H_0$（$p = 0.8$）

计算

$$\hat{p} \sim N\left(0.8, \sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{60}}\right)$$

$$\text{Pvalue} = P(\hat{p} \le 0.52) = \text{normalcdf}\left(\begin{array}{l} \text{lower}: 0 \\ \text{upper}: 0.52 \\ \mu: 0.8 \\ \sigma: \sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{60}} \end{array}\right)$$

$$\approx 0$$

结论: p-value $\approx 0 < 0.05$ ∴ 推翻 $H_0$.

∴ $H_A$成立.

# 4-step process

State ← 目的.目标. settings定义

Plan ← 用什么方法. 验证条件

Do ← 关键指标计算

Conclude. ← 根据关键指标作出结论.

# 4-step for HT.

1). State: We are testing

做的工作

$H_0: p = 0.8$

$H_A: p < 0.8$

细节

at $\alpha = 0.05$

先定 $H_A$. 将 $H_A$ 设置为你想证明的
再定 $H_0$. $H_A$ 是用 ">" or "<" or "≠"
$H_0$ 用 "=".

$\alpha$ or $\alpha$-level 是你设定的小概率
的标准.

变量定义

where $p$ is the true proportion of female student among all students in our school.

Plan：1）声明所用方法． 2）验证方法适用条件

We are using 1-sample z-test for p.

其它情况 2-sample t test for $\mu_1-\mu_2$

1-sample 因为只有 p 而不是 $p_1-p_2$.

若是 $p_1-p_2$ 则为 2-sample. 如例 $\mu_1-\mu_2 \Rightarrow$ 2 sample

z-test 中的 z 对应 for p. 若是 for $\mu$ 则是 t

原因是 sampling distribution 形状不同.

z-test 中的 test 对应我们做 hypothesis test.

- 1-sample
  - z 系列 → p
  - t 系列 → $\mu$
  - $p$
- 2-sample
  - z 系列 → $p_1 - p_2$
  - t 系列 → $\mu_1 - \mu_2$
- multiple sample ($\geq 3$)
  - $\chi^2$-test
  - ANOVA

  → test

interval

or

test

验条件：3条件（大部分）

1) SRS the sample of 60 students was randomly selected. ✓

(It is reasonable to assume)

2) 10% condition the sample size (60) is less than 10% of the population size (600) ✓

test for p 3) $np_0 = 60 \times 0.8 = 48 \geq 10$

$n(1-p_0) = 60 \times 0.2 = 12 \geq 10$ ✓

Do：记算关键指标（for test 计算 p-value）

用计算器，写明参数

By using calculator

Ha 里的 P 值

1-prop Z test

函数名

$P_0$：0.8

$X$：$\hat{p} \cdot n = 0.47 \times 60$ ← 4舍5入

$n$：sample size 60

prop："<"

Ha 中不等号方向

We get p-value ≈ 0

$z = -6.4549$.

Conclude：

Because our p-value ($\approx 0$) is less than our $\alpha$-level ( 0.05 ). We can reject Ho. We do have convincing evidence that the true proportion of female student among all student is less than 0.8

Type I Error : R O T

Reject Ho

Ho True.

Probability of making type I error: $\alpha$-level

Type II error : F O F.

fail to reject

$H_0$

$H_0$ false.

Probability of Type II error:

$\rightarrow$ $\beta$-level.

$= 1-$ Power of test.

Power of test $\Leftarrow$

1) Sample size.
$n\uparrow$ power$\uparrow$ $\beta\downarrow$

2) $\alpha$-level
$\alpha\uparrow \rightarrow$ power$\uparrow \rightarrow \beta\downarrow$

3). effective gap.
$d$.

$d = p_0 - p$

$d\uparrow$ Power$\uparrow \to \beta\downarrow$

Confidence Interval

找 pop. parameter 的大致范围

有 $\hat{p}$，找 $p \in C$ ， How?

→ 围绕 $\hat{p}$ 构建 alternative sampling distribution.

why 叫 alternative? 不是 real sampling dist.

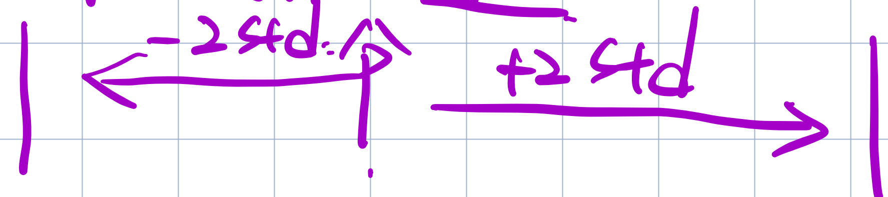
real sampling distri ← 以 pop. param 为中心。

alternative sampling distri ← 以 sample statistics 为中心、

$\hat{p}$ or $\bar{x}$

1) 以 $\hat{p}$ 为中心、以 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 为 std. 构建 alt-sampling distri: $\tilde{p} \sim N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

$\tilde{p}$ 是 p 的可能值



lower bound of confidence level

upper bound of confidence level

$$0.47 - \sqrt{\frac{0.47\times 0.53}{60}}$$

$$0.47$$

$$0.47 + 2\times\sqrt{\frac{0.47\times 0.53}{60}}$$

0.341

0.598

$$p \in [0.341, 0.598)$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

95% 的 $\hat{p}$

SRR ⇒ $E(\hat{p})=p$ ⇒ $\hat{p}$ 和 $p$ 应该很像.

$\hat{p}$ is the best guess for $p$.

Confidence interval 置信区间.

Sample Statistics ± Margin of Error

$\hat{p}$

Margin of Error = Critical Value × Standard Error

Std of clt-sampling distri

用 confidence Level 算

用公式

(c-level)

c-level 作为中间面积 $\xrightarrow{\text{invNorm}}$ z 值.

[illegible]